

# Quadratursignale: Komplex, aber nicht kompliziert

von Richard Lyons

Deutsche Übersetzung: Horst Gruchow, DL6KBF

## Einführung

Quadratursignale basieren auf der Schreibweise als komplexe Zahlen und vielleicht kein anderes Thema verursacht Neueinsteigern mehr Kopfschmerzen als dieses mit seinen fremdartigen Begriffen wie *j-Operator*, *komplex*, *imaginär*, *real* oder *orthogonal*. Falls Sie ein unheimliches Gefühl beschleicht, was komplexe Zahlen und der Ausdruck  $j = \sqrt{-1}$  mit der Wirklichkeit zu tun haben, seien Sie nicht verzagt, Sie befinden sich in guter Gesellschaft.

Selbst Carl Friedrich Gauss, einer der bedeutendsten Mathematiker der Menschheitsgeschichte, nannte den *j-Operator* den „Schatten der Schatten“. Hier wollen wir nun etwas Licht auf diesen Schatten werfen, damit Sie nicht dauernd die Seelsorge-Hotline für Quadratursignale anrufen müssen.

Quadratur-Signalverarbeitung wird in vielen Bereichen der Wissenschaft und des Ingenieurwesens verwendet und Quadratursignale sind unbedingt notwendig, um die Vorgänge und Anwendungen in modernen digitalen Kommunikationssystemen zu beschreiben. In diesem Tutorial werden wir die Grundlagen komplexer Zahlen erarbeiten und uns damit vertraut machen, diese zur Beschreibung von Quadratursignalen einzusetzen. Danach wenden wir uns dem Begriff 'negative Frequenz' zu, da dieser mit der algebraischen Schreibweise von Quadratursignalen zusammenhängt und lernen, die Sprache der Quadraturverarbeitung zu sprechen. Darüber hinaus verwenden wir dreidimensionale Zeit- und Frequenzdomänen-Abbildungen, um Quadratursignale anschaulich und nachvollziehbar zu machen. Dieses Tutorial schließt ab mit einem kurzen Überblick darüber, wie Quadratursignale mit Hilfe der Quadratur-Signalabtastung erzeugt werden können.

## Was bringen uns Quadratursignale?

Quadratursignalformate, auch *komplexe Signale* genannt, finden Anwendung in vielen digitalen Signalverarbeitungsprozessen wie

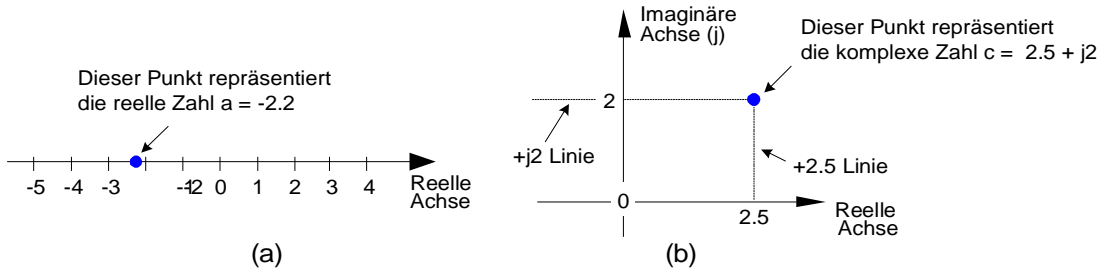
- digitalen Kommunikationssystemen
- Radarsystemen
- Laufzeitdifferenz-Verarbeitung in Funkortungssystemen
- Kohärenz-Impuls Messverfahren
- Einseitenband-Modulatoren
- usw.

Diese Anwendungen fallen in die allgemeine Kategorie der Quadratur-Verarbeitung und sie stellen zusätzliche Prozessfähigkeiten bereit durch die damit verbundene Messung der Phase von sinusförmigen Signalen.

Ein Quadratursignal ist ein zweidimensionales Signal, dessen Wert zu einem bestimmten Zeitpunkt durch eine komplexe Zahl mit zwei Teilen beschrieben wird; zum einen durch den Realteil und zum anderen durch den Imaginärteil. (Die Worte 'real' und 'imaginär' sind leider wegen der unterschiedlichen Bedeutung in der Alltagssprache etwas unglücklich gewählt. Kommunikations-Ingenieure nennen sie deshalb '*in-phase*' und '*quadrature-phase*'. Mehr dazu später). Beschäftigen wir uns nun zunächst mit der Schreibweise dieser komplexen Zahlen.

**Ableitung und Schreibweise komplexer Zahlen**

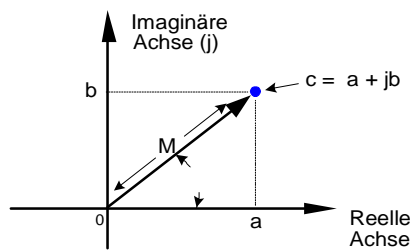
Zur Einführung in unsere Terminologie legen wir zunächst fest, dass *reelle Zahlen* diejenigen sind, die wir im alltäglichen Leben benutzen, wie z.B. Spannung, Temperatur auf der Celsius-Skala oder der Saldo Ihres Bankkontos. Diese eindimensionalen Zahlen können entweder positiv oder negativ sein wie in **Figur 1a** zu sehen. **Figur 1a** zeigt eine eindimensionale Achse und wir sagen, dass eine einzelne reelle Zahl durch einen Punkt auf dieser Achse darstellbar ist. Traditionsgemäß nennen wir diese Achse die reelle Achse.



**Figur 1.** Darstellung einer reellen Zahl und einer komplexen Zahl

Eine *komplexe Zahl* wird in **Figur 1b** gezeigt, ebenfalls dargestellt als Punkt. Allerdings sind komplexe Zahlen nicht darauf beschränkt, auf einer eindimensionalen Linie zu liegen, sondern können sich irgendwo auf einer zweidimensionalen Fläche befinden. Diese Fläche wird 'Ebene komplexer Zahlen' genannt (Mathematiker nennen sie manchmal auch *Arganddiagramm*) und sie ermöglicht es uns, komplexe Zahlen durch den *Realteil* und den *Imaginärteil* zu beschreiben. Zum Beispiel liegt in **Figur 1b** der Punkt, der die komplexe Zahl  $c = 2.5 + 2j$  repräsentiert, in der Ebene komplexer Zahlen weder auf der reellen noch auf der imaginären Achse. Der Punkt lässt sich lokalisieren, indem wir auf der reellen Achse +2.5 Einheiten abzählen und dann +2 Einheiten entlang der imaginären Achse nach oben gehen. Betrachten Sie bitte die reelle und die imaginäre Achse genau so, wie Sie es von der Nord-Süd- und Ost-West-Achse in einem Atlas kennen.

Wir werden das Ganze einmal geometrisch veranschaulichen, um die Arithmetik komplexer Zahlen besser zu verstehen. Schauen wir uns **Figur 2** an, so bietet sich die Trigonometrie rechtwinkliger Dreiecke an, um verschiedene Arten der Darstellung der komplexen Zahl  $c$  zu definieren.



**Figur2.** Darstellung der komplexen Zahl  $c = a + jb$  in der Ebene komplexer Zahlen

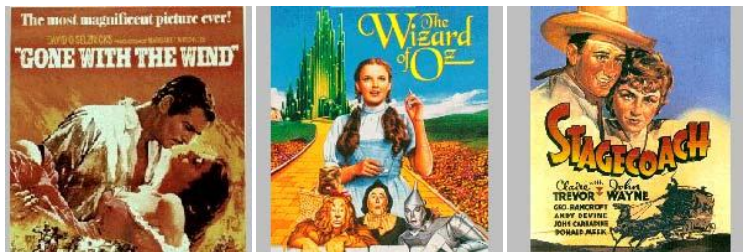
In der Literatur finden wir verschiedene Darstellungsarten für die komplexe Zahl  $c$ :

Bezeichnung	Mathematischer Ausdruck	Bemerkungen	
Rechtwinklige Form	$c = a + jb$	Verwendet für Erklärungszwecke. Am leichtesten zu verstehen. [Auch <i>kartesische</i> Form genannt.]	(1)
Trigonometrische Form	$c = M[\cos(\phi) + j\sin(\phi)]$	Allgemein zur Beschreibung von Quadratursignalen in der Kommunikationstechnik verwendet.	(2)
Polare Form	$c = Me^{j\phi}$	Sehr rätselhaft, aber in mathematischen Gleichungen die meist verwendete Form. [Auch <i>Exponentialform</i> genannt. Manchmal geschrieben als $M\exp(j\phi)$ .]	(3)
Magnitude-Winkel Form	$c = M \angle \phi$	Verwendet für Beschreibungszwecke, aber zu sperrig für die Verwendung in algebraischen Gleichungen. [Im Wesentlichen eine Kurzform von Gleichung (3).]	(4)

Gleichungen (3) und (4) erinnern uns daran, dass  $c$  auch als Spitze eines Vektorpfeils in der Ebene komplexer Zahlen betrachtet werden kann mit der Magnitude  $M$  (Länge o. Größe; Anm. d. Ü.) und der Richtung von  $\phi$  Winkelgrad relativ zur positiven reellen Achse, wie in **Figur 2** zu sehen. Behalten Sie bitte im Hinterkopf, dass  $c$  eine komplexe Zahl ist, aber die Variablen  $a$ ,  $b$ ,  $M$  oder  $\phi$  alle reelle Zahlen darstellen. Die Größe von  $c$ , manchmal auch Modulus von  $c$  genannt, ist

$$M = |c| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{5}$$

[Wissensfrage: In welchem Film aus dem Jahr 1939 – für viele der beste Film aller Zeiten – versucht einer der Hauptakteure, Gleichung (5) zu zitieren?



Zurück zum Tagesgeschäft. Der Phasenwinkel  $\phi$ , auch *Argument*, ist der Arcustangens des Verhältnisses  $\frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}}$  oder

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{b}{a} \right] \tag{6}$$

Wenn wir Gleichung (3) und (2) gleichsetzen,  $Me^{j\phi} = M[\cos(\phi) + j\sin(\phi)]$ , dann können wir das aussagen, was zu seinen Ehren eine der '*Eulerschen Identitäten*' genannt wird:

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi) \tag{7}$$

Der misstrauische Leser sollte nun fragen: „Warum ist es zulässig, eine komplexe Zahl durch diesen fremdartigen Ausdruck mit dem natürlichen Logarithmus  $e$  zu ersetzen, der auch noch mit einem imaginären Wert potenziert wird?“

Wir können Gleichung (7) beweisen, wie der größte Experte der Welt für unendliche Reihen, Herr Leonhard Euler, es schon vor uns getan hat, indem wir  $z$  in der Reihenentwicklungs-Definition  $e^z$  in der obersten Zeile von **Figur 3** durch  $j\phi$  ersetzen. Die Ersetzung lässt sich in Zeile 2 nachvollziehen. Als nächstes untersuchen wir die höheren Ordnungen von  $j$  auf ihren Einfluss auf die Reihe (Hilfe:  $j^2=-1, j^3=-j$ , etc ; Anm. d. Übersetzers), so kommen wir zu dem Ergebnis in Zeile 3 von **Figur 3**. Diejenigen von Ihnen mit tiefergehenden mathematischen Kenntnissen ähnlich Euler (oder die ein Mathematikbuch zu Rate ziehen) werden erkennen, dass die wechselnden Ausdrücke in Zeile 3 die Reihenentwicklung der Cosinus- und Sinusfunktionen darstellen.

$$\begin{aligned}
 e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \\
 e^{j\phi} &= 1 + j\phi + \frac{(j\phi)^2}{2!} + \frac{(j\phi)^3}{3!} + \frac{(j\phi)^4}{4!} + \frac{(j\phi)^5}{5!} + \frac{(j\phi)^6}{6!} + \dots \\
 e^{j\phi} &= 1 + j\phi - \frac{\phi^2}{2!} - j \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + j \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots \\
 &= \cos(\phi) + j \sin(\phi)
 \end{aligned}$$

**Figur 3** Eine Ableitung der Eulerschen Formel mit Hilfe der Reihenentwicklung für  $e^z$ ,  $\cos(\phi)$  und  $\sin(\phi)$ .

**Figur 3** beweist Gleichung (7) und unsere Darstellung einer komplexen Zahl mit Hilfe der polaren Form von Gleichung (3):  $Me^{j\phi}$ . Wenn Sie in der ersten Zeile von **Figur 3**  $z$  durch  $-j\phi$  ersetzen, wird daraus eine etwas andere und sehr brauchbare Form der Eulerschen Identität:

$$e^{-j\phi} = \cos(\phi) - j \sin(\phi) \tag{8}$$

Die polare Form der Gleichungen (7) und (8) kommt uns sehr entgegen, da

- sie mathematische Ableitungen und Berechnungen vereinfacht,
  - indem sie trigonometrische Gleichungen in die einfachere Exponentialschreibweise umwandelt, und
  - mathematische Operationen mit komplexen Zahlen genau den gleichen Regeln folgen wie mit reellen Zahlen.
- sie die Addition von Signalen einfach durch Addition komplexer Zahlen ermöglicht (Vektoraddition),
- sie die kompakte und präziseste Schreibweise darstellt,
- sie ein Beispiel dafür ist, wie digitale Kommunikationssysteme implementiert und in der Literatur beschrieben werden.

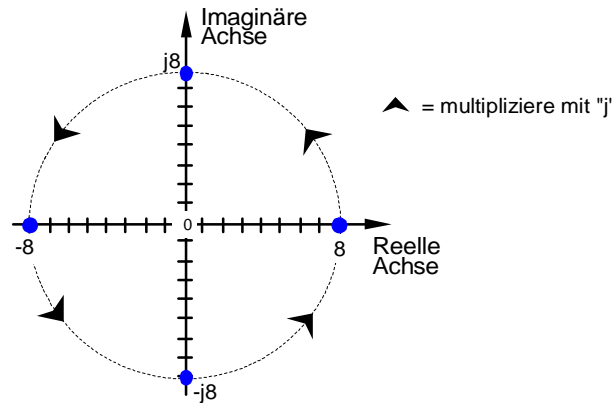
Wir werden Gleichungen (7) und (8) dazu verwenden, um zu sehen, warum und wie Quadrature Signale in digitalen Kommunikationsanwendungen eingesetzt werden. Aber zuerst wollen wir tief Atem holen und in die Dämmerzone dieses "j" - Operators eintauchen.

Die Definition  $j = \sqrt{-1}$  haben Sie schon einmal gesehen. Mit anderen Worten heisst dies, dass  $j$  eine Zahl ist, die mit sich selbst multipliziert negativ wird. Und genau diese Definition bereitet dem Anfänger Schwierigkeiten, weil wir alle wissen, dass eine Zahl mit sich selbst multipliziert eigentlich immer positiv ist. (Unglücklicherweise ist es in der DSP Literatur oft so, dass  $j$  definiert wird und man dann hastig dazu übergeht, die verschiedenen Arten zu zeigen, wie der "j" - Operator zur Analyse sinusförmiger Signale eingesetzt wird. Der Leser vergisst dann bald die eigentliche Frage: Was bedeutet  $j = \sqrt{-1}$  eigentlich wirklich?) Tatsächlich gab es  $\sqrt{-1}$  in der Mathematik schon eine ganze Weile, ohne richtig ernst genommen zu werden, bis dann damit im 16. Jahrhundert

Kubische Gleichungen gelöst werden mussten. [1], [2] Zögernd begannen Mathematiker das abstrakte Konzept von  $\sqrt{-1}$  zu akzeptieren, ohne eine Anschauung davon zu haben, da die mathematischen Eigenschaften im Einklang mit der Arithmetik normaler reeller Zahlen standen.

Erst Eulers Gleichsetzung komplexer Zahlen zu realen Sinussen und Cosinussen und Gauss' brillante Einführung der komplexen Ebene führten schliesslich zur Anerkennung von  $\sqrt{-1}$  durch die Mathematiker Europas im 18. Jahrhundert. Euler, das Gebiet der reellen Zahlen hinter sich lassend, zeigte, dass komplexe Zahlen eine saubere und durchgängige Verwandtschaft zu den gut bekannten reellen trigonometrischen Funktionen von Sinus und Cosinus hatten. So wie Einstein die Entsprechung von Masse und Energie zeigte, so zeigte Euler die Entsprechung von reellen Sinussen und Cosinussen zu komplexen Zahlen. So wie heutige Physiker nicht wissen, was ein Elektron ist, aber seine Eigenschaften verstehen, so wollen wir uns keinen Kopf machen darüber, was "j" ist, sondern uns damit zufrieden geben, seine Eigenschaften zu verstehen. Für unseren Zweck bedeutet der j-Operator, eine komplexe Zahl um 90° gegen den Uhrzeigersinn zu rotieren. (Hier: Originalsatz ist eine Anspielung auf den Unterschied zwischen britischem und amerikanischem Englisch und nicht ohne weiteres zu übersetzen; Anm. d. Übersetzers). Lassen Sie uns schauen, warum.

Wir werden uns nun mit der Darstellung imaginärer Zahlen in der Ebene komplexer Zahlen vertraut machen, indem wir die mathematischen Eigenschaften des  $j = \sqrt{-1}$  Operators untersuchen, wie in **Figur 4** gezeigt.



**Figur 4.** Was passiert mit der reellen Zahl 8, wenn wir sie mit j multiplizieren.

Das Multiplizieren beliebiger Zahlen auf der reellen Achse mit j ergibt ein imaginäres Produkt, das auf der imaginären Achse liegt. Das Beispiel in **Figur 4** zeigt, dass, wenn +8 – dargestellt durch den blauen Punkt auf der reellen Achse – mit j multipliziert wird, das Resultat eine imaginäre Zahl +j8 ist, deren Position (ausgehend von +8) um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht ist und somit auf der positiven imaginären Achse liegt. Ebenso resultiert die Multiplikation von +j8 mit j in einer erneuten Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn mit dem Ergebnis -8, das auf der negativen reellen Achse liegt, da  $j^2 = -1$  ist. Die weitere Multiplikation mit -8 führt zu einer weiteren Rotation um 90° mit dem Ergebnis -j8, das auf der negativen imaginären Achse zu finden ist. Jede durch einen Punkt darstellbare Zahl resultiert, mit j multipliziert, in einer Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn. (Umgedreht führt eine Multiplikation mit -j zu einer Drehung von 90° im Uhrzeigersinn in der Ebene komplexer Zahlen.)

Wenn wir in Gleichung (7)  $\phi = \pi/2$  setzen, dann können wir sagen, dass

$$e^{j\pi/2} = \cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2) = 0 + j1, \text{ oder}$$

$$e^{j\pi/2} = j \tag{9}$$

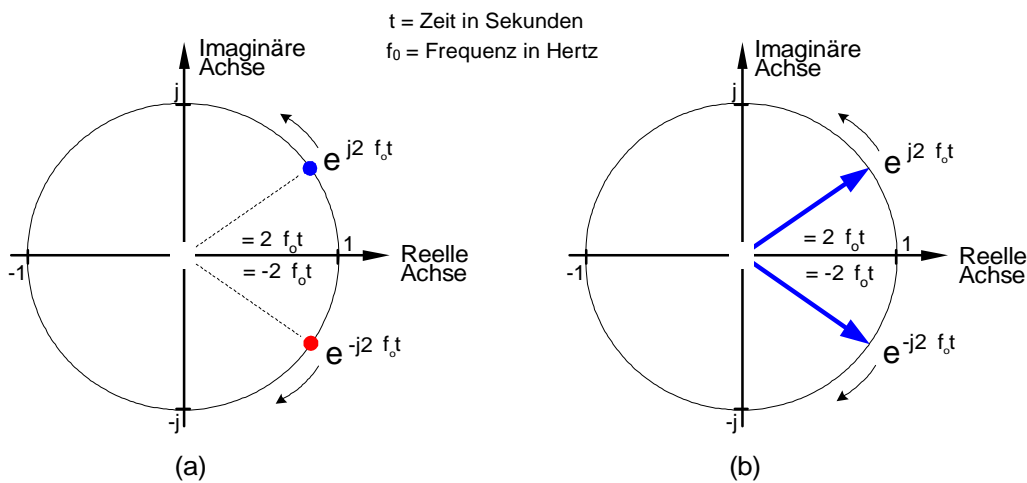
Und hier ist der Punkt, den wir uns merken müssen. Nehmen Sie eine einzelne komplexe Zahl, dargestellt durch einen Punkt in der Ebene komplexer Zahlen, und multiplizieren diese mit j oder mit  $e^{j\pi/2}$ , so ist das Ergebnis eine neue komplexe Zahl, die in der Ebene komplexer Zahlen um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht ist. Vergessen Sie das bitte nicht, denn es ist sehr hilfreich bei der Beschäftigung mit der

Literatur über Signalverarbeitungssysteme.

Lassen Sie uns nun einen Moment verschlafen. Machen Sie sich nichts daraus, wenn die Ideen von imaginären Zahlen und der Ebene komplexer Zahlen ein wenig geheimnisvoll erscheinen. Das passiert zunächst jedem — je mehr Sie sie verwenden, desto vertrauter werden sie damit. (Denken Sie daran, dass der  $j$ -Operator über Hunderte von Jahren hinweg Europas schwergewichtigste Mathematiker verwirrt hat.) Zugegeben, die Mathematik komplexer Zahlen ist zunächst nicht nur ein wenig absonderlich, sondern sogar ziemlich bizarr bezüglich der Terminologie. Während der Ausdruck "imaginär" nur einfach unglücklich gewählt ist, ist der Ausdruck "komplex" geradezu unheimlich. Bei der ersten Begegnung mit der Formulierung "komplexe Zahlen" denken wir eigentlich sofort an "komplizierte Zahlen". Das ist bedauerlich, denn das Konzept komplexer Zahlen ist eigentlich überhaupt nicht so kompliziert. Gut zu wissen, dass das ganze vorangegangene mathematische Gedöns nur den Zweck hatte, Gleichungen (2), (3), (7) und (8) zu beweisen. Nun wollen wir (endlich!) über Signale in der Zeitdomäne sprechen.

**Abbildung reeller Signale durch Zeiger**

OK, wenden wir unsere Aufmerksamkeit einer komplexen Zahl zu, die eine Funktion der Zeit ist. Denken Sie sich bitte eine Zahl der Größe 1, deren Phasenwinkel über die Zeit größer wird. Diese komplexe Zahl ist der Punkt  $e^{j2\pi f_0 t}$  in **Figur 5a**. (Der  $2\pi f_0 t$ -Ausdruck bedeutet hier Bogenmaß/Sekunde und entspricht einer Frequenz von  $f_0$  Umläufen/Sekunde, wobei  $f_0$  in Hertz angegeben ist.) Mit ansteigender Zeit  $t$  vergrößert sich der Phasenwinkel der komplexen Zahl und unser Punkt kreist entgegen dem Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung der komplexen Ebene. **Figur 5a** gibt diese Zahl als blauen Punkt wieder, sozusagen eingefroren zu einem beliebigen Zeitpunkt. Nehmen wir an, dass die Frequenz  $f_0 = 2\text{Hz}$  sei, dann würde dieser Punkt zwei Mal pro Sekunde den Nullpunkt umkreisen. Wir können uns auch eine andere komplexe Zahl  $e^{-j2\pi f_0 t}$  überlegen (roter Punkt), deren Zeiger im Uhrzeigersinn kreist, da der Phasenwinkel mit ansteigender Zeit negativer wird.

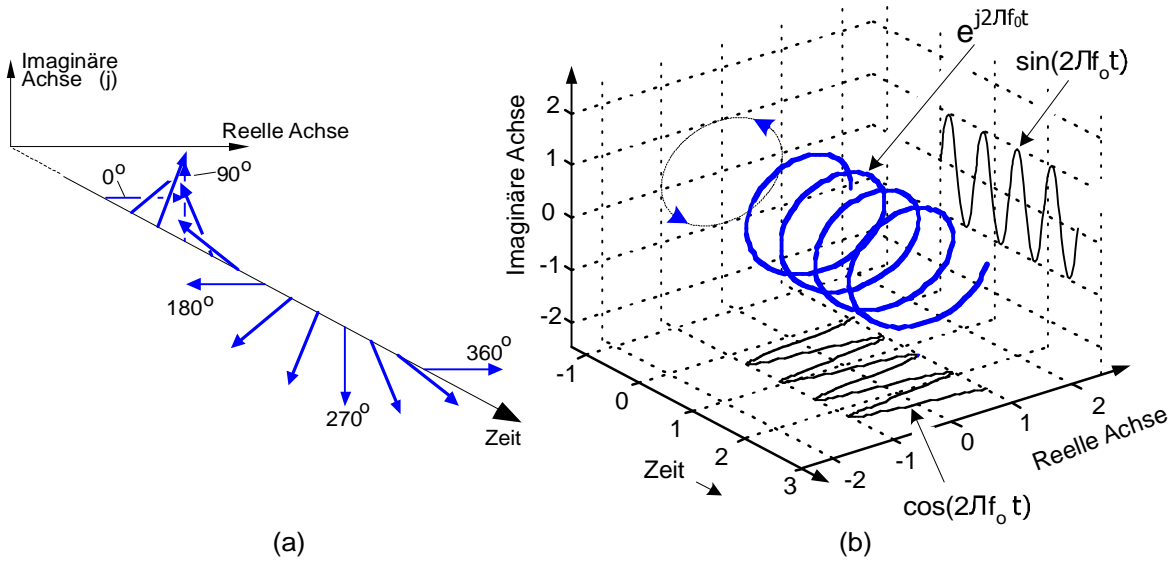


**Figur 5.** Eine zeitliche Momentaufnahme zweier komplexer Zahlen, deren Exponenten sich über die Zeit ändern

Lassen Sie uns nun unsere zwei komplexen Ausdrücke  $e^{j2\pi f_0 t}$  und  $e^{-j2\pi f_0 t}$  einfach *Quadratursignale* nennen. Beide haben reelle und komplexe Anteile und beide sind Funktionen der Zeit. In der Literatur werden die beiden Ausdrücke  $e^{j2\pi f_0 t}$  und  $e^{-j2\pi f_0 t}$  oft auch *komplexe Exponentialform* genannt.

Wir können uns diese beiden Quadratursignale  $e^{j2\pi f_0 t}$  und  $e^{-j2\pi f_0 t}$  auch als Spitzen zweier Zeiger vorstellen, die in entgegengesetzter Richtung zueinander rotieren, wie in **Figur 5b** dargestellt. Wir werden diese Zeigerschreibweise zunächst beibehalten, da sie es uns ermöglicht, unser Ziel der Darstellung realer sinusförmiger Signale in Zusammenhang mit der Ebene komplexer Zahlen zu erreichen. Also, Finger weg!

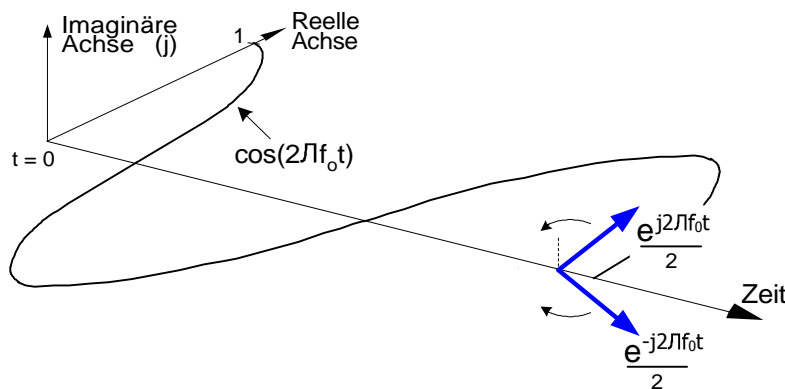
Um sicherzustellen, dass wir das Verhalten dieser Zeiger verstehen, zeigt **Figur 6a** den dreidimensionalen Weg des  $e^{j2\pi f_0 t}$  - Zeigers über die Zeit. Dazu haben wir die Zeitachse hinzugefügt, die sozusagen aus dem Papier herauschaut, damit man den spiralförmigen Weg des Zeigers sehen kann. **Figur 6b** veranschaulicht die fortlaufende Bewegung der Spitze des  $e^{j2\pi f_0 t}$  Zeigers. Die komplexe Zahl  $e^{j2\pi f_0 t}$  oder, wenn Sie so wollen, die Spitze ihres Zeigers, folgt also einem korkenzieherartigen Weg entlang der und zentriert über die Zeitachse. Der Realteil und der Imaginärteil von  $e^{j2\pi f_0 t}$  ergeben durch Projektion die Sinus- und Cosinusfunktionen dazu, wie in **Figur 6b** zu sehen. (Dieses Bild sagt eigentlich alles über Quadratur-signale aus, was man als Funkamateurliebling wissen muss; Anm. d. Übersetzers.)



**Figur 6.** Die Bewegung des  $e^{j2\pi f_0 t}$  - Zeigers (a) und der Zeigerspitze (b)

Kehren Sie bitte zu **Figur 5b** zurück und fragen Sie sich: "Du, was ist denn nun die Vektorsumme dieser beiden Zeiger, da sie ja entgegengesetzt rotieren?" Denken Sie darüber einen Moment nach... Richtig, die Realteile der Zeiger addieren sich immer fortlaufend und die Imaginärteile werden immer ausgelöscht. Das bedeutet, dass die Summierung dieser  $e^{j2\pi f_0 t}$  und  $e^{-j2\pi f_0 t}$  - Zeiger immer eine rein reelle Zahl ergibt. Die praktische Anwendung in modernen digitalen Kommunikationssystemen basiert auf dieser Eigenschaft!

Damit die Bedeutung der reellen Summe zweier komplexer sinusförmiger Signale noch einmal richtig deutlich wird, lassen Sie uns ein anderes Bild dazu zeichnen. Nehmen wir an, die Wellenform in dem dreidimensionalen Bild **Figur 7** wäre durch zwei komplexe Zeiger halber Größe,  $e^{j2\pi f_0 t} / 2$  und  $e^{-j2\pi f_0 t} / 2$ , erzeugt worden, die auf und entlang der Zeitachse in entgegengesetzter Richtung rotieren.



**Figur 7.** Ein Cosinus, dargestellt durch die Summe zweier rotierender komplexer Zeiger

Wenn wir über diese Zeiger nachdenken, wird klar, warum die Cosinus-Schwingung durch die Summe



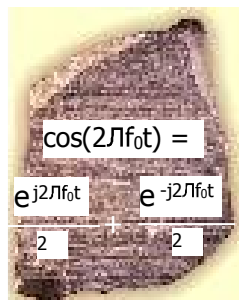
zweier komplexer Exponentialfunktionen berechnet werden kann mit

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} = \frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2} + \frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \quad (10)$$

Gleichung (10), ein wohlbekannter und wichtiger Ausdruck, wird auch eine der Eulerschen Identitäten genannt. Wir hätten diese Identität auch durch Lösen von Gleichungen (7) und (8) für  $\sin(\phi)$  ableiten können durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke und Lösen der endgültigen Gleichung für  $\cos(\phi)$ . Ähnlich könnten wir die gleiche algebraische Übung durchführen und zeigen, dass eine reale Sinusschwingung ebenfalls die Summe zweier komplexer Exponentialfunktionen ist, also

$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} = \frac{je^{-j2\pi f_0 t}}{2} - \frac{je^{j2\pi f_0 t}}{2} \quad (11)$$

Schauen Sie sich Gleichungen (10) und (11) genau an -- sie sind die Standardausdrücke für die Cosinus- und Sinus-Schwingung in komplexer Schreibweise, wie sie in der Literatur über Quadratur-Kommunikationssysteme zu finden sind. Um Sie, verehrter Leser, davor zu bewahren, dass es in Ihrem Kopf rotiert wie die rotierenden komplexen Zeiger, vergegenwärtigen Sie sich bitte den einzigen Zweck von **Figur 5 bis Figur 7**, den Beweis für die komplexen Ausdrücke der Cosinus- und Sinusschwingung in Gleichungen (10) und (11) zu erbringen. Diese beiden Gleichungen zusammen mit Gleichungen (7) und (8) sind der Stein von Rosette für Quadratur-Signalverarbeitung. (Der altägyptische *Rosetta Stone* trug maßgeblich zur Entzifferung der Hieroglyphen bei; siehe Abb. unten; Anm. d. Übersetzers).

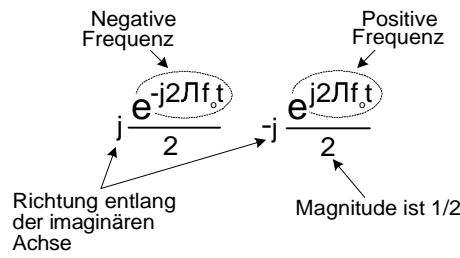


Wir sind nun mit Leichtigkeit in der Lage, zwischen reellen Sinusschwingungen und komplexen Exponentialfunktionen hin- und her umzuformen. Wiederum lernen wir, wie reale Signale, die über ein Koaxkabel gesendet oder digitalisiert und in einem Computer gespeichert werden können, durch komplexe Zahlenschreibweise dargestellt werden. Ja, die Bestandteile einer komplexen Zahl sind alle reell, aber wir behandeln diese Teile auf besondere Art, nämlich in *Quadratur*.

**Darstellung von Quadratursignalen in der Frequenzdomäne**

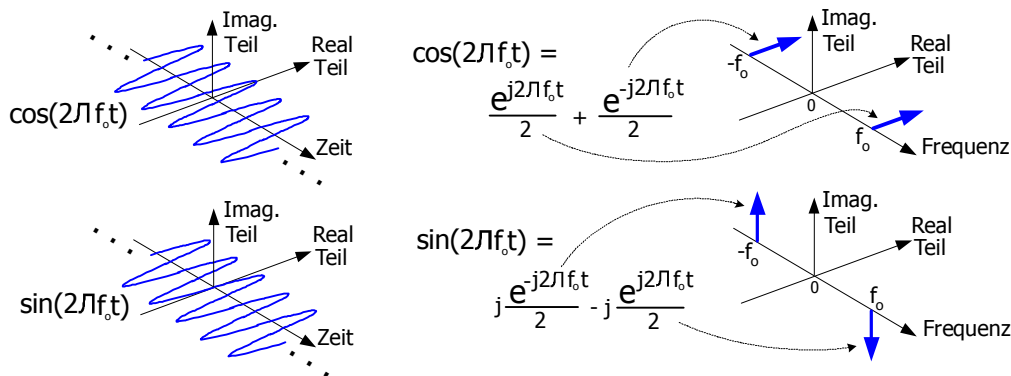
Jetzt, wo wir viel über die Zeitdomänen-Natur von Quadratursignalen wissen, sind wir bereit, die Frequenzdomänen-Darstellung zu betrachten. Dieses Material wird für Sie leicht zu verstehen sein, da wir volle dreidimensionale Ansichten der Frequenzdomäne illustrieren wollen. Dadurch wird keine der Phasenbeziehungen unserer Quadratursignale den Blicken verborgen bleiben. **Figur 8** erzählt uns etwas über die Regeln zur Darstellung komplexer Exponentialfunktionen in der Frequenzdomäne.





**Figur 8.** Aufschlüsselung komplexer Exponentialfunktionen

Wir werden eine einzelne komplexe Exponentialfunktion als einen schmalbandige Impuls darstellen mit der Frequenz, die im Exponenten angegeben ist. Zusätzlich werden wir die Phasenbeziehungen zwischen solchen Exponentialfunktionen entlang der reellen und imaginären Achse zeigen. Zur Illustration dieser Phasenbeziehungen brauchen wir eine Darstellung in der komplexen Frequenzdomäne. Nach all diesem Gesagten schauen Sie bitte **Figur 9** an.

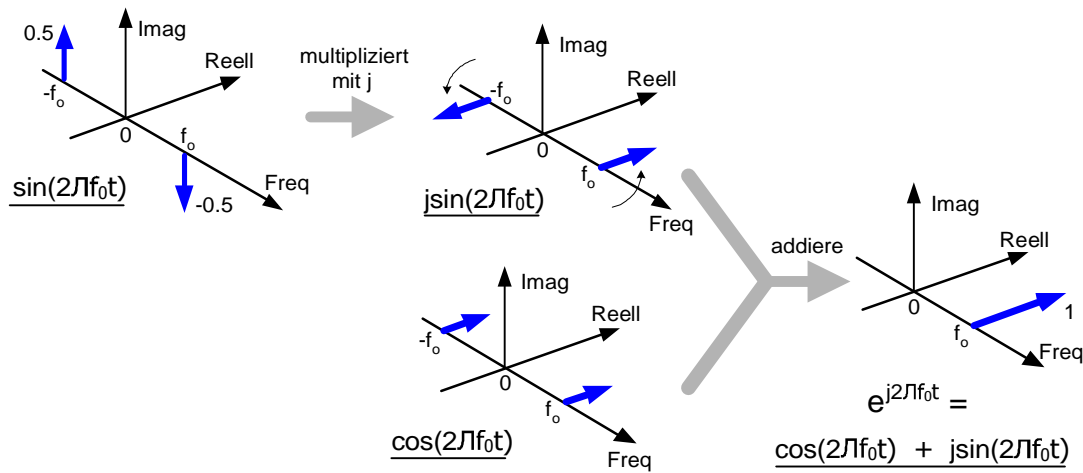


**Figur 9.** Darstellung einer Sinus- und einer Cosinusschwingung in der komplexen Frequenzdomäne

Schauen Sie, wie eine reelle Cosinusschwingung und eine reelle Sinusschwingung in unserer komplexen Frequenzdomänen-Darstellung auf der rechten Seite von **Figur 9** veranschaulicht werden. Die blauen Pfeile rechts in **Figur 9** sind keine rotierenden Zeiger, sondern Frequenzdomänen-Impulssymbole, die eine einzelne Spektrallinie der komplexen Exponentialfunktion  $e^{j2\pi f_0 t}$  anzeigen. Die Richtungen, in die die Spektralimpulse zeigen, deuten lediglich die relativen Phasen der Spektralkomponenten an. Die Amplituden der Spektralimpulse sind  $1/2$ .

Nun..., warum interessiert uns diese 3D-Frequenzdomänen-Darstellung überhaupt? Sie ist das Werkzeug, das wir verwenden, um die Erzeugung (Modulation) und Erkennung (Demodulation) von Quadratursignalen in digitalen (und einigen analogen) Kommunikationssystemen zu verstehen -- und das sind die zwei Ziele dieses Tutorials. Bevor wir uns weiter um diese Prozesse kümmern, wollen wir die Frequenzdomänen-Darstellung anhand eines kleinen Beispiels bestätigen.

**Figur 10** ist ein einfaches Beispiel, wie wir die komplexe Frequenzdomäne verwenden. Wir beginnen mit einer reellen Sinusschwingung, wenden den  $j$ -Operator darauf an und addieren das Ergebnis zu einer reellen Cosinusschwingung derselben Frequenz. Das Endergebnis ist eine einzelne komplexe Exponentialfunktion  $e^{j2\pi f_0 t}$ , die die mathematisch gewonnene Eulersche Identität aus Gleichung(7) graphisch illustriert.



**Figur 10.** Komplexe Frequenzdomänen-Ansicht von Eulers:  $e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$ .

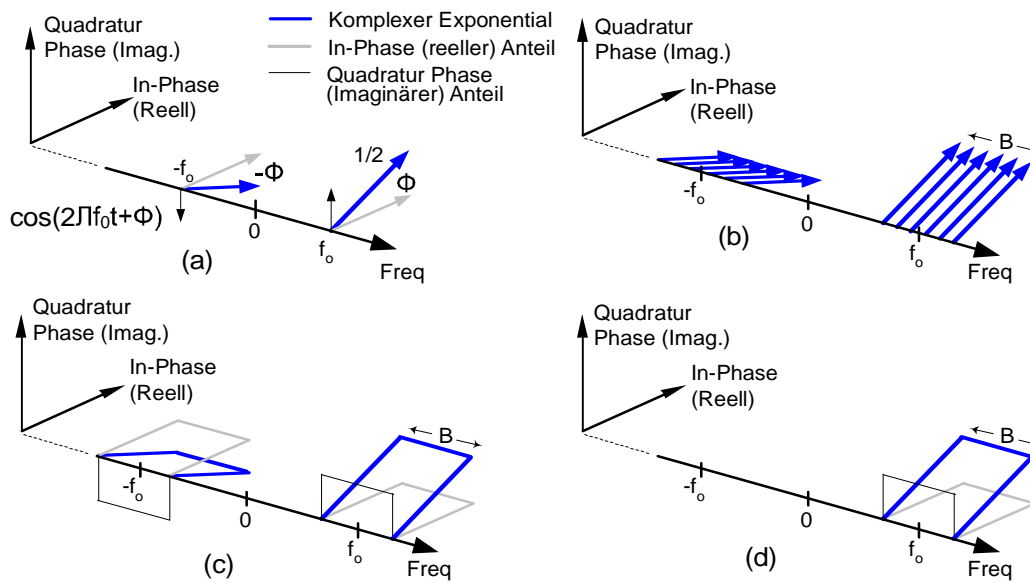
Der Begriff der negativen Frequenz ist zu sehen als diejenigen Spektralimpulse, die auf der Frequenzachse bei  $-2\pi f_0$  Radian/sek lokalisiert sind. Dieses Bild zeigt den großen Nutzen: *Wenn wir die komplexe Notierung verwenden, dann werden gewöhnliche komplexe Exponentiale wie  $e^{j2\pi ft}$  und  $e^{-j2\pi ft}$  die grundlegenden Bestandteile der reellen Sinuskurven  $\sin(2\pi ft)$  oder  $\cos(2\pi ft)$ .* Das ist so, weil sowohl  $\sin(2\pi ft)$  als auch  $\cos(2\pi ft)$  aus  $e^{j2\pi ft}$  - und  $e^{-j2\pi ft}$  -Komponenten gebildet sind. Wenn man die diskrete Fourier-Transformation (DFT) auf diskrete Zeitdomänen-Abtastwerte einer  $\sin(2\pi f_0 t)$ -Sinuskurve, einer  $\cos(2\pi f_0 t)$ -Cosinuskurve oder einer komplexen  $e^{j2\pi f_0 t}$  - Sinuskurve anwendet und das komplexe Ergebnis aufzeichnet, erhält man exakt die Schmalband-Impulse aus **Figur 10**.

Wenn Sie die Notierung und die Operationen aus **Figur 10** verstehen, können Sie sich auf die Schulter klopfen, denn Sie wissen dann eine Menge über die Natur und Mathematik von Quadratur-Signalen.

### Bandpass-Quadratursignale in der Frequenzdomäne

In der Quadratur-Signal-Verarbeitung wird der reelle Anteil des Spektrums vereinbarungsgemäß als In-Phase-Komponente bezeichnet und der imaginäre Anteil als Quadratur-Komponente. Die Signale, deren komplexe Spektren in **Figur 11a, b und c** dargestellt sind, sind reell und können in der Zeitdomäne so dargestellt werden, dass sie Amplitudenwerte haben, deren reeller Teil ungleich Null ist und der imaginäre Teil gleich Null. Wir sind nicht gezwungen, die komplexe Notation auf sie anzuwenden, um sie in der Zeitdomäne zu repräsentieren - die Signale sind reell.

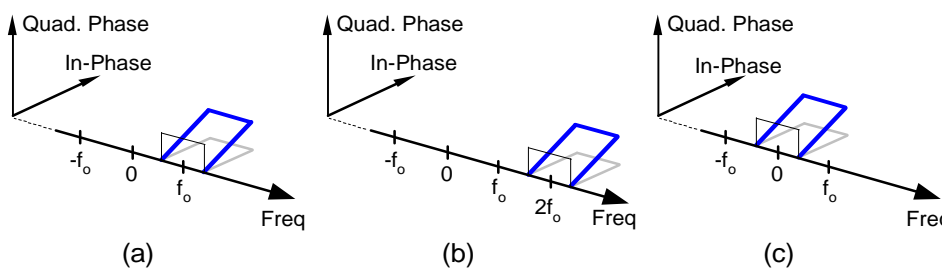
Reelle Signale haben immer positive und negative spektrale Anteile. Für jedes reelle Signal gilt, dass die positiven und negativen Frequenzanteile ihres In-Phase(reellen)-Spektrums immer symmetrisch um den Nullpunkt der Frequenz liegen. Das heißt, dass die positiven und negativen In-Phase-Frequenzanteile spiegelbildlich zueinander liegen. Umgekehrt sind die positiven und negativen Frequenzanteile des Quadratur-(imaginären)Spektrums immer Negative voneinander. Das heißt, dass der Phasenwinkel irgend eines gegebenen positiven Quadratur-Frequenzanteils das Negative des Phasenwinkels des zugehörigen negativen Quadratur-Frequenzanteils ist, wie durch die dünnen schwarzen Pfeile in **Figur 11a** dargestellt. Diese ‚konjugierte Symmetrie‘ ist die unveränderliche Natur reeller Signale, wenn ihre Spektren in komplexer Notation dargestellt werden.



**Figur 11.** Quadratur-Darstellung von Signalen: (a) Reelle Sinuskurve  $\cos(2\pi f_0 t + \Phi)$ , (b) Reelles Bandpass-Signal, das sechs Sinuskurven mit der Bandbreite  $B$  [Hz] enthält; (c) Reelles Bandband-Signal, das unendlich viele Sinuskurven mit der Bandbreite  $B$  [Hz] enthält; (d) Komplexes Bandpass-Signal mit der Bandbreite  $B$  [Hz].

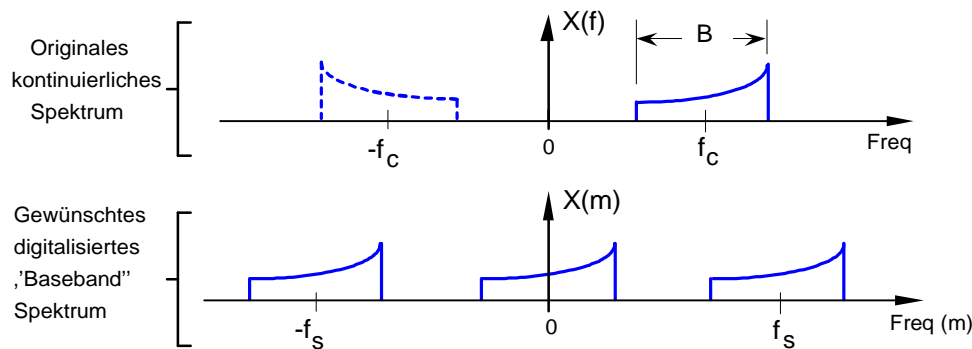
Wir sollten uns daran erinnern, dass die fetten Pfeile in **Figur 11(a) und (b)** keine rotierenden Zeiger sind. Es sind Frequenzdomänen-Impulsymbole, die ein einzelnes komplexes Exponential  $e^{j2\pi f t}$  anzeigen. Die Richtungen, in die die Impulse weisen, zeigen die relativen Phasen der spektralen Komponenten an.

Wir sollten uns ein wichtiges Prinzip merken, bevor wir fortfahren. Multipliziert man ein Zeitdomänen-Signal mit dem komplexen Exponential  $e^{j2\pi f_0 t}$  – man kann das Quadratur-Mischung (auch Komplexes Mischen) nennen – so wird das Signalspektrum um  $f_0$  Hz nach oben versetzt, wie in **Figur 12a und b** dargestellt. Entsprechend versetzt das Multiplizieren eines Zeitdomänen-Signals mit  $e^{-j2\pi f_0 t}$  das entsprechende Signalspektrum um  $f_0$  Hz nach unten.



**Figur 12.** Quadratur-Mischung eines Signals: (a) Spektrum eines komplexen Signals  $x(t)$ , (b) Spektrum von  $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$ , (c) Spektrum von  $x(t)e^{-j2\pi f_0 t}$ .

Wir können nun alles das, was wir bis hierher gelernt haben, dazu verwenden, um den Prozess der Quadratur-Abtastung zu untersuchen. Quadratur-Abtastung nennt sich das Verfahren zur Digitalisierung eines kontinuierlichen (analogen) Bandpass-Signals und Umsetzung seines Spektrums so, dass es bei 0 Hz zentriert ist. Wir wollen nun schauen, wie dieses populäre Verfahren arbeitet und denken uns ein kontinuierliches Bandpass-Signal mit der Bandbreite  $B$ , das um die Trägerfrequenz  $f_c$  Hz zentriert ist.

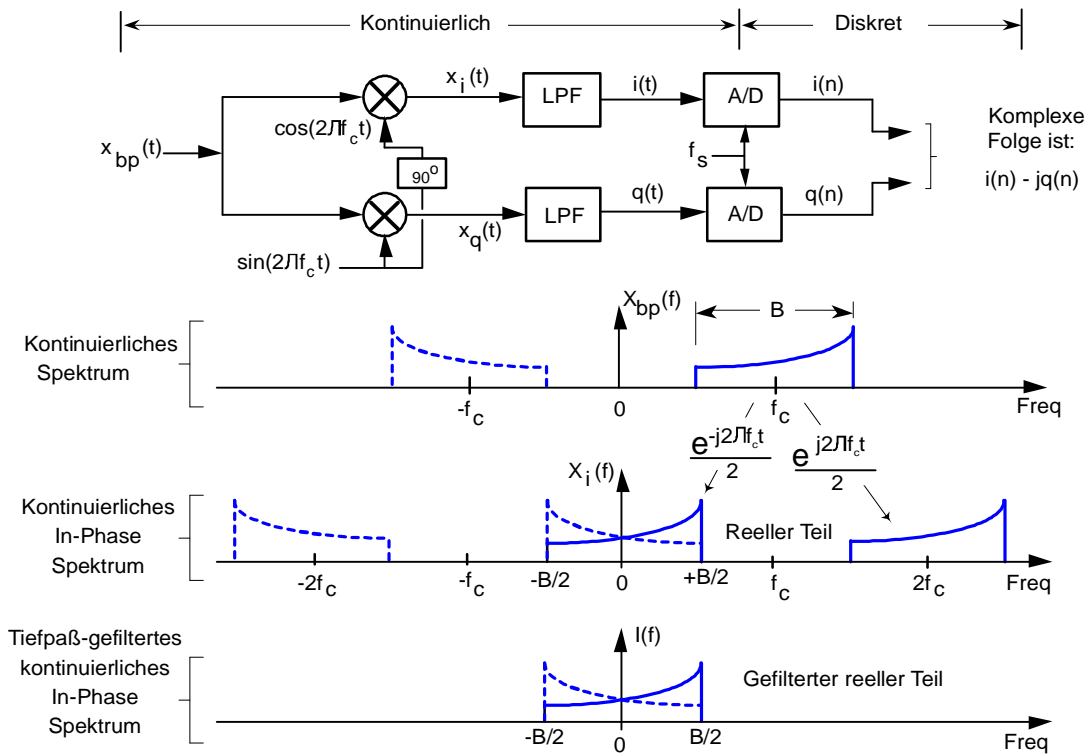


**Figur 13.** Die ‚vorher‘ und ‚nachher‘ Spektren eines Quadratur-abgetasteten Signals

Unser Ziel bei der Quadratur-Abtastung ist es, eine digitalisierte Version des analogen Bandpass-Signals zu erhalten, aber wir hätten dieses einzelne Spektrum unseres digitalisierten Signals gerne bei null Hz zentriert, nicht bei  $f_c$  Hz. Das heisst, wir möchten ein Zeitdomänen-Signal mit  $e^{-j2\pi f_c t}$  mischen, um eine komplexe Abwärts-Konvertierung durchzuführen. Die Frequenz  $f_s$  ist die Abtastrate des Digitalisierers in Abtastwerten/Sekunde. Wir zeigen sich wiederholende Spektren in der unteren Abbildung von **Figur 13**, um Sie an diesen Effekt bei der A/D-Wandlung zu erinnern.

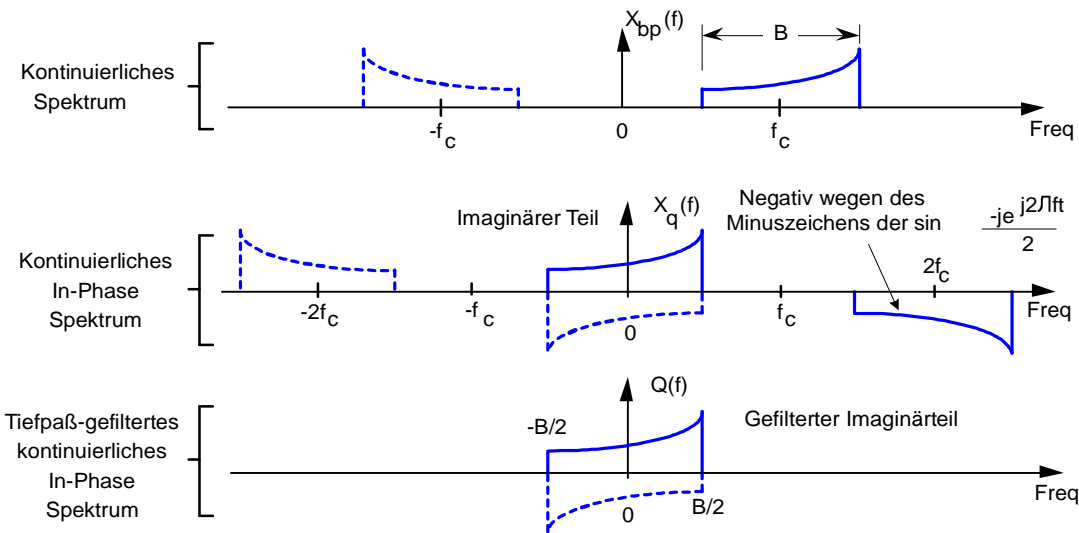
OK, ... Schauen Sie sich das folgende Blockdiagramm einer Quadratur-Abtastung an, das als I/Q-Demodulation (oder ‚Weaver Demodulation‘ für diejenigen von Ihnen mit Erfahrung in der Kommunikationstheorie) bekannt ist, abgebildet im oberen Bild von **Figur 14**. Diese Anordnung zweier Sinus-Oszillatoren mit ihrer relativen Phase von  $90^\circ$  wird oft auch ‚Quadratur-Oszillator‘ genannt.

Diese  $e^{j2\pi f_c t}$  und  $e^{-j2\pi f_c t}$  Terme in dieser belebten **Figur 14** erinnern uns, dass die einzelnen komplexen Exponentiale, die einen reellen Cosinus beinhalten, jeden Teil des  $X_{bp}(f)$  Spektrums dublichieren, um das  $X_i(f)$  Spektrum zu erzeugen. **Figur 14** zeigt, wie wir den gefilterten kontinuierlichen In-Phase-Teil unseres gewünschten komplexen Quadratur-Signals erhalten. Definitionsgemäß werden diese  $X_i(f)$  und  $I(f)$  Spektren als ‚nur reell‘ behandelt.



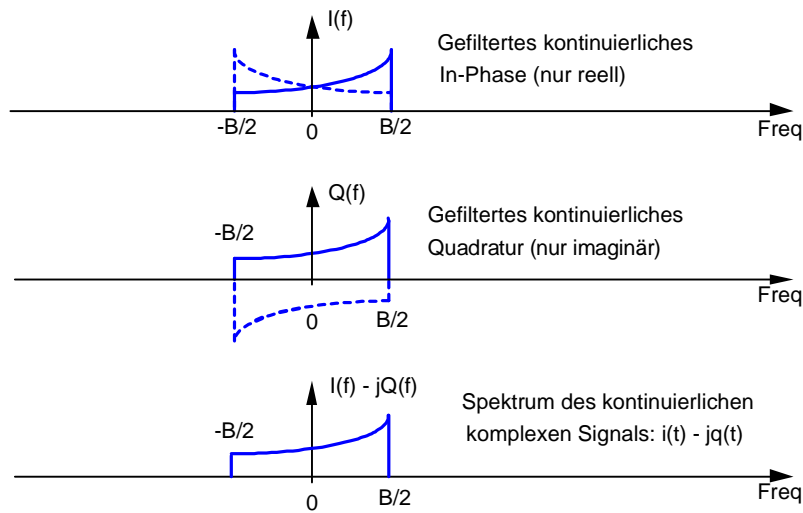
**Figur 14.** Blockdiagramm der Qudadratur-Abtastung und Spektren innerhalb des In-Phase (oberen) Signalpfades.

Entsprechend zeigt **Figur 15** wie wir den gefilterten kontinuierlichen Quadratur-Phasenanteil unseres komplexen Quadratur-Signals erhalten durch Mischen von  $X_{bp}(t)$  mit  $\sin(2\pi f_c t)$ .



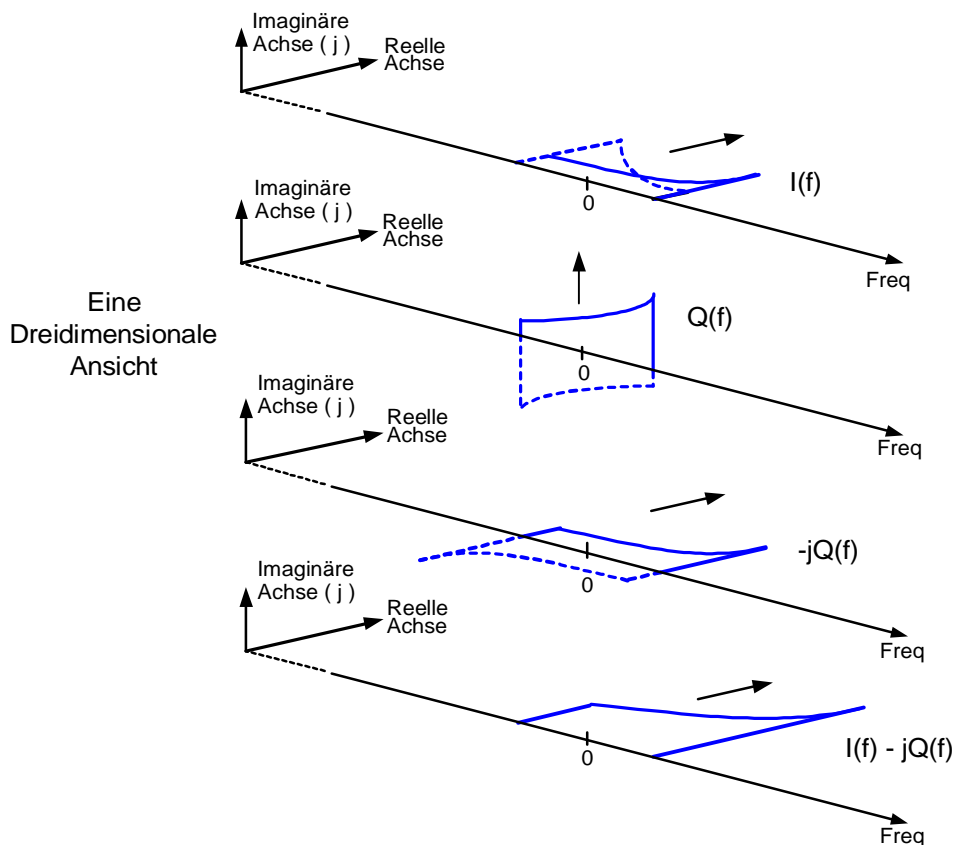
**Figure 15.** Spektren innerhalb des Quadratur-Phasensignalpfades (unten) des Blockdiagramms.

Hier wollen wir hin:  $I(f) - jQ(f)$  ist das Spektrum einer komplexen Kopie unseres ursprünglichen Bandpass-Signals  $X_{bp}(t)$ . Wir zeigen die Addition dieser zwei Spektren in **Figur 16**.



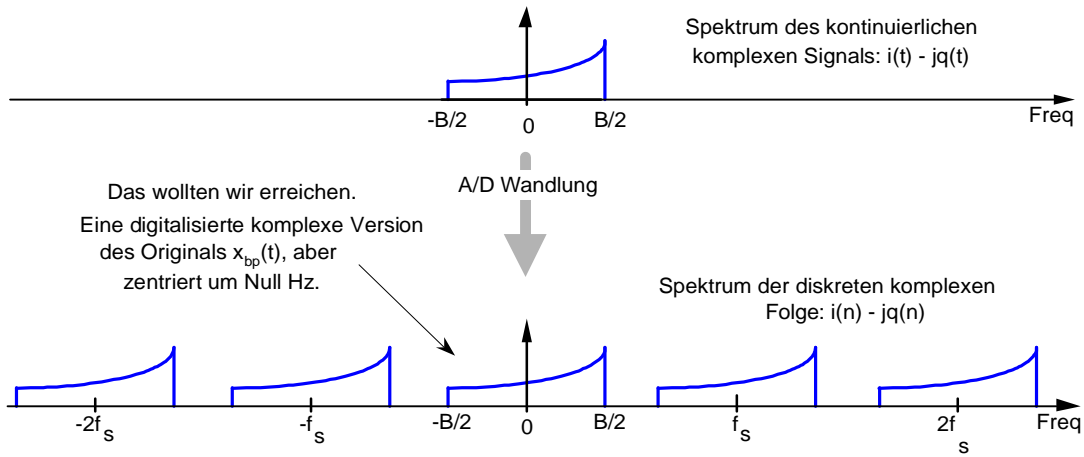
**Figur 16.** Kombination der  $I(f)$  und  $Q(f)$  Spektren zum Erhalt der gewünschten ' $I(f) - jQ(f)$ ' Spektren.

Diese typische Darstellung der Quadratur-Abtastung sieht aus wie ‚Hokuspokus‘. Betrachten wir diese Situation aber aus dreidimensionaler Sicht, wie in **Figur 17**, so sehen wir, dass der  $-j$ -Faktor das ‚nur imaginäre‘  $Q(f)$  um  $-90^\circ$  rotiert und es ‚nur reell‘ macht. Dieses  $-jQ(f)$  wird dann zu  $I(f)$  addiert.



**Figur 17.** 3-D Ansicht der Kombination der  $I(f)$  und  $Q(f)$  Spektren, um daraus die  $I(f) - jQ(f)$  Spektren zu erhalten.

Das komplexe Spektrum in **Figur 18 (unten)** zeigt, was wir erhalten wollten: eine digitalisierte Version des komplexen Bandpass-Signals, zentriert um Null Hz.

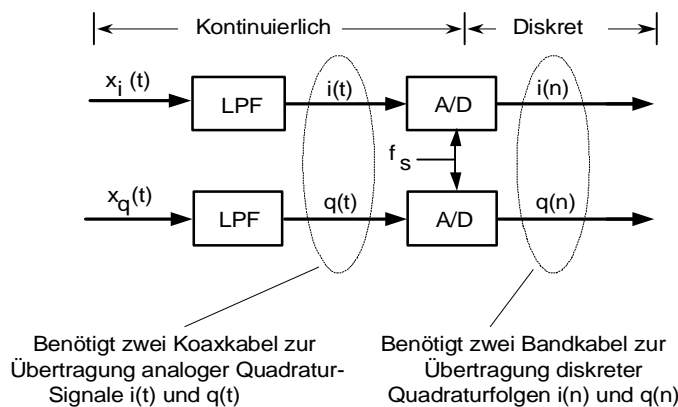


**Figur 18.** Das kontinuierliche komplexe Signal  $i(t) - q(t)$  wird digitalisiert, um diskrete Werte  $i(n) - jq(n)$  zu erhalten.

Einige Vorteile dieses Schemas der Quadratur-Abtastung:

- Jeder A/D - Wandler arbeitet mit der halben Abtastrate gegenüber der Standard Signal-Abtastung
- In vielen Hardware-Implementierungen bedeuten niedrigere Taktraten Energieersparnis
- Mit einer gegebenen Abtasterate  $f_s$  lassen sich Analogsignale in größerer Bandbreite abtasten
- Quadraturfolgen machen FFT-Verarbeitung effizienter wegen einer größeren Frequenzbandbreite
- Da Quadraturfolgen effektiv mit dem Faktor 2 überabgetastet (oversampling; Anm. d. Übersetzers) werden, sind Operationen zur Signalquadratur möglich, ohne dass ein ‚Upsampling‘ (Auffüllen mit  $n-1$  Nullen zwischen benachbarten Originaldaten zur Erhöhung der Datenrate; Anm. d. Übersetzers) notwendig ist
- Die Kenntnis der Phase von Signalen ermöglicht kohärente Verarbeitung und
- Quadratur-Abtastung erleichtert das Messen der momentanen Magnitude und Phase eines Signals während der Demodulation.

Schauen wir erneut auf unser Blockdiagramm, so erinnert uns das an eine wichtige Charakteristik von Quadratursignalen. Es ist uns möglich, analoge Quadratur-signal an einen entfernten Standort zu senden; dazu brauchen wir zwei Koaxkabel, auf denen die zwei reellen  $i(t)$ - und  $q(t)$ - Signale übertragen werden. (Zur Übertragung einer diskreten Zeitdomänen-Quadraturfolge würden wir zwei mehradrige Bandkabel benötigen, wie in **Figur 19** gezeigt).



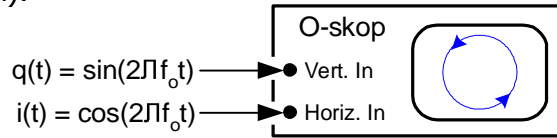
**Figur 19.** Erinnerung, dass Quadratur-signale zwei reale Signalanteile enthalten.

Zur rechten Würdigung der physikalischen Bedeutung unserer bisherigen Diskussion wollen wir uns daran erinnern, dass ein kontinuierliches Quadratur-signal  $x_c(t) = i(t) + jq(t)$  nicht nur eine mathematische Abstraktion ist. Wir können  $x_c(t)$  in unserem Labor erzeugen und es zum Labor am Ende des Flures senden. Alles, was wir brauchen, sind zwei Signalgeneratoren für Sinussignale, die die gleiche Frequenz  $f_0$



erzeugen. (Allerdings müssen wir die beiden Generatoren irgendwie synchronisieren, so dass ihre Phasenverschiebung zueinander exakt 90° beträgt.) Als Nächstes stecken wir an die Ausgangsbuchsen der Generatoren zwei Koaxkabel und verlegen diese beiden Kabel, gekennzeichnet mit 'i(t)' für unser Cosinus-Signal und 'q(t)' für das Sinussignal, bis zu ihrem Zielort am Ende des Flures.

Nun stellen wir uns zwei Quizfragen! Was würden wir in dem anderen Labor auf dem Schirm eines Oszilloskops sehen, wenn die kontinuierlichen Signale i(t) und q(t) mit dem horizontalen bzw. vertikalen Eingang des Oszilloskops verbunden wären? (Selbstverständlich denken wir daran, die Horizontalablenkung des Oszis auf ‚Extern‘ zu stellen).



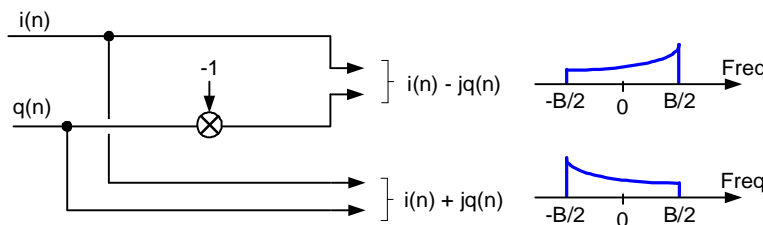
**Figur 20.** Darstellen eines Quadratur-Signals mittels eines Oszilloskops.

Nächste Frage wäre: Was wäre auf dem Oszilloskop-Schirm zu sehen, wenn die Kabel falsch beschriftet und somit beide Signale unabsichtlich vertauscht wären?

Die Antwort auf die erste Frage ist, dass wir einen hellen Fleck sehen würden, der entgegen dem Uhrzeigersinn kreisförmig auf dem Oszilloskopschirm rotiert. Wenn die Kabel vertauscht wären, würden wir ebenfalls einen Kreis sehen, wobei der helle Fleck diesmal im Uhrzeigersinn rotieren würde. Dies ergäbe eine hübsche kleine Demonstration, wenn wir die Frequenz der Signalgeneratoren auf, sagen wir, 1 Hz setzen würden.

Das Oszilloskop-Beispiel hilft uns dabei, die wichtige Frage zu beantworten: „Wie tritt der j-Operator in Erscheinung, wenn wir mit Quadratursignalen arbeiten?“ Die Antwort ist, dass der j-Operator durch die Art zu Tage tritt, wie wir die beiden Signale relativ zueinander behandeln. Wir müssen sie als *rechtwinklig* zueinander ansehen auf die Weise, dass das In-Phase i(t)-Signal einen Ost-West-Wert darstellt und das Quadratur-Phasensignal q(t) einen darauf senkrecht stehenden Nord-Süd-Wert. (Rechtwinklig bedeutet, dass die Nord-Süd-Richtung exakt 90° relativ zur Ost-West-Richtung orientiert ist). In unserem Oszilloskop-Beispiel ist der j-Operator einfach dadurch realisiert, wie die Verbindung zum Oszilloskop hergestellt wird. Das In-Phase-Signal i(t) steuert die Horizontal-Ablenkung und das Quadratur-Phase-Signal q(t) die Vertikal-Ablenkung. Das Resultat ist ein zweidimensionales Quadratursignal, dargestellt durch die momentane Position des Leuchtpunktes auf dem Oszilloskop-Schirm.

Die Person in dem Labor am anderen Ende des Flures, die die diskreten Folgen i(n) und q(n) empfängt, hat die Fähigkeit, die Ausrichtung der endgültigen komplexen Spektren dadurch zu steuern, dass sie die Folge jq(n) entweder addiert oder subtrahiert wie in **Figur 21** gezeigt.



**Figur 21.** Verwendung des Vorzeichens von q(n) zur Steuerung der spektralen Orientierung.

Der obere Pfad in **Figur 21** ist gleichbedeutend mit der Multiplikation des Originals  $x_{bp}(t)$  mit  $e^{-j2\pi f_c t}$  und der untere Pfad gleichbedeutend mit der Multiplikation von  $x_{bp}(t)$  mit  $e^{j2\pi f_c t}$ . Deshalb – wäre der Quadratur-Anteil unseres Quadratur-Oszillators oben in **Figur 14** negativ – dann würden die resultierenden

komplexen Spektren  $-\sin(2\pi f_c t)$  umgeklappt (ca. 0 Hz) sein gegenüber den Spektren aus **Figur 21**.

Während wir gerade darüber nachdenken, komplexe Spektren umzuklappen, sollten wir uns daran erinnern, dass es zwei einfache Wege gibt, eine spektrale Magnitude der Folge  $x(n) = i(n) + jq(n)$  umzukehren (invertieren). Wie in **Figur 21** zu sehen, können wir eine Konjugation (Spiegelung an der reellen Achse; Anm. d. Übersetzers) anwenden, um ein  $x'(n) = i(n) - jq(n)$  mit einem invertierten Magnitudenspektrum zu erhalten. Die zweite Methode besteht darin, die individuellen  $i(n)$  und  $q(n)$  Abtastwerte von  $x(n)$  zu vertauschen, um daraus eine neue Folge  $y(n) = q(n) + ji(n)$  zu bilden, deren spektrale Magnitude invertiert ist gegenüber der spektralen Magnitude von  $x(n)$ . (Angemerkt sei, dass, während  $x'(n)$ 's und  $y(n)$ 's spektrale Magnituden gleich sind, ihre spektralen Phasen nicht gleich sind).

### Schlußbemerkungen

Hiermit ist unser kleines Seminar über Quadratursignale beendet. Wir haben gelernt, dass wir durch die Verwendung der komplexen Ebene die mathematischen Beschreibungen von komplexen Zahlen visualisieren konnten und dass wir dadurch in der Lage waren, zu erkennen, auf welche Weise Quadratursignale und reelle Signale miteinander verbunden sind. Wir haben gesehen, wie dreidimensionale Frequenzdomänen-Darstellungen uns beim Verstehen der Erzeugung von Quadratursignalen geholfen haben, bei der Frequenzumsetzung, bei der Kombination und bei der Trennung. Am Ende haben wir noch ein Beispiel für Quadratur-Abtastung besprochen und zwei Schemata zur Invertierung des Spektrums einer Quadraturfolge.



### Referenzen

- [1] D. Struik, *A Concise History of Mathematics*, Dover Publications, NY, 1967.
- [2] D. Bergamini, *Mathematics*, Life Science Library, Time Inc., New York, 1963.
- [3] N. Boutin, "Complex Signals," *RF Design*, December 1989.

Auflösung der Trivia-Frage direkt hinter Gleichung (5) ist: Die Vogelscheuche in „Wizard of Oz“. Auch möchte ich Danke sagen an Grant Griffin dessen Empfehlungen den Wert dieses Tutorials erhöht haben.

### Haben Sie diese kleine Geschichte schon gehört?

Während seines Aufenthalts in Berlin war Leonhard Euler oft in philosophische Debatten verwickelt, besonders mit Voltaire. Unglücklicherweise waren Eulers philosophische Fähigkeiten nicht sehr stark ausgeprägt und ihm unterliefen zur Freude der Teilnehmer oft Schnitzer. Auf jeden Fall erhielt er nach seiner Rückkehr nach Rußland die Gelegenheit zur Revange. Katharina die Große hatte den berühmten französischen Philosophen Diderot an ihren Hof eingeladen, der zum Leidwesen der Zarin versuchte, ihre Untertanen zum Atheismus zu bekehren. Sie bat Euler, ihn zum Schweigen zu bringen. Eines Tages wurde der französische Philosoph, der keinerlei Mathematik-Kenntnisse hatte, am Hof informiert, dass jemand einen mathematischen Beweis für die Existenz Gottes gefunden habe. Er wollte diesen hören. Euler trat vor und sagte:

"Sir,  $\frac{a + b}{n} = x$ , daraus folgt: Gott existiert; Antworte!" Diderot hatte keine Ahnung, wovon Euler sprach. Auf jeden Fall verstand er das allgemeine Gelächter, das dann folgte und kehrte bald darauf nach Frankreich zurück.

(Der obige Absatz stammt von einer hervorragenden Webseite über die Geschichte der Mathematik und der Mathematiker: (Link nicht mehr gültig; Anm. d. Übersetzers)  
[http://www.shu.edu/academic/arts\\_sci/Undergraduate/math\\_cs/sites/math\\_reals/history/euler.html](http://www.shu.edu/academic/arts_sci/Undergraduate/math_cs/sites/math_reals/history/euler.html))

Obwohl es eine hübsche Geschichte ist, glauben seriöse Mathematik-Historiker sie nicht. Sie wissen, dass Diderot einige mathematischen Kenntnisse besaß und sie können sich nicht vorstellen, dass Euler auf diese Weise herumgealbert hat.